

解答例 2018年度(平成30年度)

(専願制推薦・公募制推薦) 数学

●工学部

●情報工学部

- 1 $x^2 + y^2$ の値は $\boxed{18}$ であり, $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$ の値は $\boxed{-14\sqrt{3}}$ である。
- 2 a の値は $\boxed{5}$ であり, b^3 の値は $\boxed{-38+17\sqrt{5}}$ である。
- 3 2次方程式 $x^2 - px + 1 = 0$ が重解をもつような p の値は $\boxed{2}$ と $\boxed{-2}$ である。
 $a < 3 < \beta < 4$ が成り立つとき, p の値は $\boxed{4}$ である。
- 4 一辺の長さは最大で $\boxed{30}$ cm であり, 最小で $\boxed{15}$ cm である。
- 5 $\tan(90^\circ - \theta)$ の値は $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ である。
- 6 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{5\sqrt{3}}$ であり, $BC = \boxed{\sqrt{21}}$ である。
- 7 方程式 $12^x - 11 \cdot 6^x + 8 \cdot 3^{x+1} = 0$ の解は $\boxed{\log_2 3}$ と $\boxed{3}$ である。
- 8 $y - x^2$ の最大値は $\boxed{\frac{17}{4}}$ であり, そのときの x の値は $\boxed{-\frac{1}{2}}$ である。
- 9 方程式 $\sin 2x = \sin x$ は $\boxed{4}$ 個の解をもち, そのうち最も大きな解は $\boxed{\frac{5\pi}{3}}$ である。
- 10 左端が U である文字列の総数は $\boxed{360}$ 通りである。また, FUKUOKA の 7 文字の中から 6 文字を取り出して横 1 列に並べるとき, 文字列の総数は $\boxed{1260}$ 通りである。
- 11 18 の倍数で, 正の約数の個数が 15 個であるような自然体は $\boxed{144}$ と $\boxed{324}$ である。
- 12 $BE : BC = \boxed{2} : \boxed{3}$ であり, $\angle BPC = \boxed{125^\circ}$ である。

(3教科型) 数学

●工学部(電子情報工学科/電気工学科)

●情報工学部(情報工学科/情報通信工学科/システムマネジメント学科)

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
105	2	-3	-2	3	$-5-4\sqrt{2}i$	6561	45	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

2

①	②	③	④	⑤	⑥
0	$-\frac{8}{5}$	$2\sqrt{5}$	$-2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$-\frac{4}{5}$

※①と②は逆でも可

- 3 (1) $x^2 = mx$ を解くと $x = 0, x = m$ となる。よって, 求める交点の座標は $(0, 0), (m, m^2) \dots$ (答)
- (2) (1)の結果より,

$$S = \int_0^m (mx - x^2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 \right]_0^m = \frac{1}{6}m^3 \dots$$
 (答)

- (3) 放物線 $y = x^2$ と接線 l' の接点の座標を (a, a^2) とすると, $\{x^2\}' = 2x$ であるから, $x = a$ における放物線 C の接線の傾きは $2a$ である。よって, $2a = m$ である。よって, 放物線 C と接線 l' の接点の座標は $(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4})$ によって, 接線 l' の方程式は $y = mx - \frac{m^2}{4}$ である。よって, 放物線 C と直線 l' および直線 $x = -1$ で囲まれた図形の面積 T は

$$T = \int_{-1}^{\frac{m}{2}} \left\{ x^2 - (mx - \frac{m^2}{4}) \right\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + \frac{m^2}{4}x \right]_{-1}^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{24}m^3 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{3} \dots$$
 (答)

3 (4) (2), (3)より, $T - S = -\frac{1}{8}m^3 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{3}$

$$f(m) = -\frac{1}{8}m^3 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{3} \text{とおく。}$$

$$f'(m) = -\frac{3}{8}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(3m+2)(m-2)$$

よって, $f(m)$ の増減表は次のようになる。

m	0	...	2	...
$f'(m)$		+	0	-
$f(m)$		↗	極大	↘

よって, 増減表より $f(m)$ の最大値は $m = 2$ のとき $f(2) = \frac{4}{3}$ である。

よって, $T - S$ の最大値は $\frac{4}{3}$... (答)

4 [A]

(1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 1, 1)$ であるから,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times (-1) = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$$

よって, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1$... (答)

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

であるから, $\theta = \frac{\pi}{3}$... (答)

(3) H は O, A, B を含む平面内にあるから, $\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ を満たす実数 s, t が存在する。

よって,

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

$\vec{CH} \perp \vec{OA}$, $\vec{CH} \perp \vec{OB}$ であるから, $\vec{CH} \cdot \vec{OA} = 0$, $\vec{CH} \cdot \vec{OB} = 0$

よって, $(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$, $(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$ より, $2s + t - 1 = 0$, $s + 2t = 0$

これより $s = \frac{2}{3}$, $t = -\frac{1}{3}$ を得る。

よって, $\vec{CH} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$... (答)

(4) (2)より, $\triangle OAB$ の面積は $\frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OB}| \sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

一方, (3)より,

$$\vec{CH} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} = \frac{2}{3}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}(0, 1, -1) - (0, 1, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

よって, $|\vec{CH}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

よって, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}$... (答)

(別解) (1)より,

$$\begin{aligned} |\vec{CH}|^2 &= \vec{CH} \cdot \vec{CH} \\ &= \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 2 + 2 - \frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって, $|\vec{CH}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

よって, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}$... (答)

4 [B]

(1) $f(x) = g(x)$ とすると, $e^{-x} \sin x = e^{-x}$

よって, $\sin x = 1$ である。 $0 \leq x \leq 5\pi$ であるから,

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{9\pi}{2} \dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \{ e^{-x} (\sin x + \cos x) \}' \\ &= -e^{-x} (\sin x + \cos x) + e^{-x} (\cos x - \sin x) \\ &= -2e^{-x} \sin x \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $g(x) \geq f(x)$ ($a \leq x \leq \beta$) であり, $a = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{9\pi}{2}$ であるから, (2)より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} (e^{-x} - e^{-x} \sin x) dx \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{9\pi}{2}}) \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3教科型) 数学

- 工学部(生命環境化学科/知能機械工学科)
- 情報工学部(情報システム工学科)
- 社会環境学部(社会環境学科)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
3	4	$\frac{4}{13}$	$\frac{41}{13}$	8	-57	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$(\frac{7}{2}, \frac{13}{10})$	$\frac{2\sqrt{34}}{5}$

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
$\sqrt{3}$	6	-1	2	-1	$6+\sqrt{3}$	1	2

3 (1) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ となる。

(2) $f'(x) = 0$ のとき $3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-2) = 0$ となる。よって $x = 2, \frac{2}{3}$ となる。

ここで、 $f(2) = -1, f(\frac{2}{3}) = \frac{5}{27}$ である。また、 $f(-1) = -10, f(\frac{5}{2}) = -\frac{3}{8}$ である。

このとき、増減表は次の通りとなる。

x	-1	...	$\frac{2}{3}$...	2	...	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-10	↗	極大 $\frac{5}{27}$	↘	極小 -1	↗	$-\frac{3}{8}$

よって $x = \frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{5}{27}$, $x = -1$ のとき最小値 -10 をとる。

(3) 方程式を変形すると $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = a$ となる。この方程式が $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ において異なる3個の実数解をもつことと、関数 $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ ($-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$) のグラフが直線 $y = a$ と異なる3点で交わることは互いに同値である。(3)で求めた増減表より、 a の値の範囲は $-1 < a \leq -\frac{3}{8}$ となる。

4 [A]

(1) $a_n \geq 0$ より、 $-n^2 - 2n + 121 \geq 0$ となり、この2次不等式を解くと、 $-1 - \sqrt{122} \leq n \leq -1 + \sqrt{122}$ となる。

よって、 $a_n \geq 0$ を満たす最大の自然数 n は $n = 10$ である。

(2) $a_n = -n^2 - 2n + 121$ より、

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n (-k^2 - 2k + 121) \\
 &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 121n \\
 &= \frac{-2n^3 - 9n^2 + 719n}{6}
 \end{aligned}$$

となる。

(3) (1)より、 $a_n \geq 0$ となる n の値の範囲は $1 \leq n \leq 10$ であるので、

$$S_1 < S_2 < \dots < S_{10} > S_{11} > \dots > S_n > S_{n+1} > \dots$$

となる。よって、 $n = 10$ のとき最大値 $S_{10} = \frac{-2 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^2 + 719 \cdot 10}{6} = 715$ となる。

4 [B]

(1) 部分積分法により

$$\begin{aligned}\int x e^{-x} dx &= -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(2) $c = \int_0^{2a} f(t) dt$ とおくと $f(x) = x e^{-x} + \frac{c}{3}$ となる。関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x) = (1-x) e^{-x}$ より、 $f'(x) = 0$ のとき、 $x = 1$ となる。 $x = 1$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるので、関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極値をとる。よって、 $a = 1$ である。

(3) (2)より $a = 1$ であるので、

$$c = \int_0^{2a} f(t) dt = \int_0^2 \left(t e^{-t} + \frac{c}{3} \right) dt = \left[-t e^{-t} - e^{-t} + \frac{ct}{3} \right]_0^2 = \frac{2c}{3} + 1 - \frac{3}{e^2}$$

となる。方程式 $c = \frac{2c}{3} + 1 - \frac{3}{e^2}$ を解くと、 $c = 3 - \frac{9}{e^2}$ となる。よって $f(x) = x e^{-x} + 1 - \frac{3}{e^2}$ となる。

(4) $x \geq 0$ のとき、 $x e^{-x} \geq 0$ かつ $1 - \frac{3}{e^2} > 0$ より、 $f(x) > 0$ である。

よって、求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^{2a} f(x) dx$$

となる。(3)より、 $S = c = 3 - \frac{9}{e^2}$ となる。